

A CONSTRUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES GLOBAIS EM ESPAÇOS COERENTES BI-ESTRUTURADOS, COM APLICAÇÃO NA COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA¹

Graçaliz Pereira Dimuro
Escola de Informática - UCPel
e-mail: liz@atlas.ucpel.tche.br

Antônio Carlos da Rocha Costa
Escola de Informática - UCPel
e-mail: rocha@atlas.ucpel.tche.br

Dalcídio Moraes Claudio
Faculdade de Matemática - PUCRS
e-mail: dalcidio@music.pucrs.br

Rua Barão de Santa Tecla 834/501
CEP 96010-140 - Pelotas - RS - Brasil

Resumo

O objetivo deste trabalho é introduzir a categoria dos sistemas ordenados de 2ª ordem e o processo de construção global utilizado para obter representações construtivas integradas desses sistemas, apresentando uma aplicação na representação dos sistemas dos números reais e intervalos de reais. Através do processo de construção global, obtém-se um espaço coerente intervalar bi-estruturado como a representação global de sistemas ordenados de 2ª ordem. Este processo é realizado em dois níveis simultâneos que se inter-relacionam: a construção da estrutura de informação, baseada em uma estrutura de espaço coerente gerado por um conjunto básico, com objetos indexados, e a construção da estrutura de aplicação - algébrica, de ordem, de medidas, topológica, etc. -, derivada da estrutura do conjunto básico.

Palavras-Chave: evolução de sistemas, espaços coerentes, teoria dos domínios, representação de números reais, representação de intervalos reais, matemática intervalar

Abstract

The aim of this work is to introduce the category of second order ordered systems and the global construction process used in order to obtain integrated constructive representations of those systems. An application of this construction process in the representation of the the systems of real numbers and real intervals is also presented. By the global construction process, a bi-structured interval coherence space is obtained as the global representation of second order ordered systems. This process is split into two simultaneous related processes: the construction of the information structure, based on a coherence space (with indexed objects) generated by a basic set, and the construction of the application structure - an algebraic, topological, ordered, etc. structure -, which is derived from the structure of the basic set.

Keywords: representation of real numbers, evolution of systems, coherence spaces, domain theory, interval mathematics, neighbourhood systems

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal introduzir a categoria dos *sistemas ordenados de 2ª ordem*² e uma metodologia para a obtenção de representações construtivas - denominadas de *representações globais* - desses sistemas, em uma estrutura baseada em Espaços Coerentes [1,2], com aplicação fundamental na Computação Científica e Matemática Intervalar. Como resultado, foi possível promover a integração entre os aspectos práticos dos processos computacionais correntes da *Computação Científica* e da *Matemática Intervalar* e os aspectos de fundamentação oferecidos pela teoria dos Domínios, em particular, os *Espaços Coerentes*.

Através desta metodologia, foi possível obter uma representação global para os objetos ditos infinitos relativamente ao conteúdo de informação, como números reais e intervalos reais, de tal forma que possam ser obtidos modelos semânticos adequados para os processos computacionais envolvendo tais objetos.

A representação construtiva obtida é denominada de global, pois, sendo realizada em dois níveis distinguíveis, compreende não somente a construção interna dos objetos da *estrutura de informação*, do

¹ Este trabalho foi financiado pela FAPERGS e CNPq

² A noção de sistema de 2ª ordem pode ser considerada como uma extensão à noção de "sistema" [27] ou de "estrutura relacional" [26], ou de Σ -estrutura [16], que são de 1ª ordem.

conjunto das aproximações destes objetos e de sua topologia de informação, mas também sua *estrutura externa de aplicação*, representando um conjunto de operações algébricas, uma relação de ordem de posição, uma família de relações, uma família de funções elementares, uma subestrutura de medidas e uma topologia induzida por ela. Existe um relacionamento entre estes dois níveis de construção, garantindo que cada componente da estrutura de aplicação tenha uma *representação interna* na estrutura de informação, e, por outro lado, a cada etapa da construção corresponda uma estrutura de aplicação definida a partir da estrutura de aplicação existente na etapa anterior.

O processo de se obter uma representação global - processo construtivo da estrutura de informação, processo construtivo da estrutura de aplicação e o mecanismo que relaciona estas estruturas - é denominado de *processo de globalização*. Procurou-se adotar um enfoque genérico, para tornar possível sua aplicação também em outras áreas. Uma abordagem categórica auxilia no entendimento do processo de globalização.

Este artigo constitui um resumo do trabalho desenvolvido. Assim, demonstrações, definições rigorosas e detalhes técnicos mais precisos e formais foram omitidos (veja [3]). Resultados parciais foram apresentados em eventos e/ou publicados e as referências são indicadas ao longo do texto, que está estruturado como descrito a seguir. Na seção 2 apresentam-se os conceitos fundamentais sobre Espaços Coerentes, introduzidos para a realização do trabalho, como espaços coerentes gerados por um conjunto básico e espaços coerentes com objetos indexados. A categoria dos sistemas ordenados de 2ª ordem é introduzida na seção 3. Na seção 4 descreve-se o processo de construção global e a representação global de sistemas. O espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais é introduzido na seção 5. As conclusões e considerações finais estão na seção 6. A seção 7 contém as referências bibliográficas.

2 Espaços Coerentes: Conceitos Fundamentais

Uma *teia* $A \equiv (A, \approx_A)$ é um par formado por um conjunto A sobre o qual é definida uma relação reflexiva e simétrica, denotada por $\approx_A$, denominada de *relação de coerência* em A . Um subconjunto x de uma teia A é *coerente* se e somente se para todo $\alpha, \beta \in x, \alpha \approx_A \beta$. Um *espaço coerente* $\mathcal{A} = (Coh(A, \approx_A), \subseteq)$ é a coleção de subconjuntos coerentes de uma teia A , $Coh(A, \approx_A)$, parcialmente ordenados pela inclusão.

Os elementos de uma teia são denominados de unidades ou "tokens". Os tokens de uma teia representam quantidades elementares ou bits de informação sobre entidades de um universo, não especificado. Coerência entre tokens significa que estas unidades podem ser vistas como pedaços de informação com relação à mesma entidade. Assim, um conjunto coerente é uma quantidade coerente de informação sobre uma mesma entidade.

Pode-se considerar um *espaço coerente* como um domínio cuja *ordem de informação* é a ordem parcial dada pela relação de inclusão, e, como tal, um espaço coerente é um cpo (ordem parcial completa) algébrico $\mathcal{A}$ que satisfaz a condição de completeza para coerência binária:

$B \subseteq \mathcal{A}, \forall c, c' \in B, (c \cup c') \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup B \in \mathcal{A}$. Além disso, para um espaço coerente $\mathcal{A}$ são válidas as

propriedades [1]: (i) todos os objetos unitários $\{\alpha\} \subseteq A$ estão em $\mathcal{A}$; (ii) $a \in \mathcal{A}, b \subseteq a \Rightarrow b \in \mathcal{A}$; (iii)

$\emptyset \in \mathcal{A}$; (iv) se X é um subconjunto dirigido (com relação a $\subseteq$) de $\mathcal{A}$, então $\bigcup^\uparrow X \in \mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{A}$ é

fechado para a união dirigida; (v) $\mathcal{A}$ é fechado para a interseção, isto é, $\bigcap X \in \mathcal{A}$, para todo $X \subseteq \mathcal{A}$.

Um *objeto total* é aquele que concentra toda informação possível sobre uma determinada entidade. Segue que um objeto x em um espaço coerente $\mathcal{A}$ é *total* se e somente se sempre que existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x \subseteq y$ então $x = y$.

Procura-se agora caracterizar as propriedades das funções entre espaços coerentes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Uma função $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é: (i) *contínua* se e somente se para todo subconjunto dirigido X de $\mathcal{A}$, tem-se que $F(X)$ é dirigido e $F(\bigcup X) = \bigcup \{F(b) | b \in X\}$; (ii) *estável* se e somente se é contínua e satisfaz a *propriedade de estabilidade* - $a \cup a' \in \mathcal{A} \Rightarrow F(a \cap a') = F(a) \cap F(a')$ -; (iii) *linear* se e somente se é estável e satisfaz a *condição de linearidade* - se $X \subseteq \mathcal{A}$, e para todo $b, c \in X \Rightarrow b \cup c \in \mathcal{A}$, então $F(\bigcup X) = \bigcup \{F(b) | b \in X\}$ -. Neste trabalho considera-se a categoria monoidal fechada LIN dos Espaços Coerentes com funções lineares.

2.1 Espaços Coerentes com Objetos Indexados

Para a abordagem adotada foi necessário introduzir uma caracterização do conteúdo de informação de um conjunto coerente, que é dada por um parâmetro que fornece uma indicação do conteúdo de informação que é comum a todos os tokens do conjunto em questão. Este parâmetro, denominado de índice de um conjunto coerente, é obtido a partir dos índices dos tokens que o compõem.

Seja $(K, \sqsubseteq, \sqcup, \perp, \top)$ um reticulado completo, onde $\sqcup$ é a operação de supremo, $\perp$ é o bottom ou menor elemento, e $\top$ é o topo, que representa explicitamente conteúdos de informação. O conteúdo de informação dos token da teia de um espaço coerente $\mathcal{A} = (\text{Coh}(A, \approx_A), \subseteq)$ é dado por uma função *índice de token* $j : A \rightarrow K$ que associa cada token $\alpha \in A$ a um índice $j(\alpha) \in K$, que representa o seu conteúdo de informação, tal que $\alpha \approx_A \beta$ se e somente se $j(\alpha) \sqcup j(\beta) \neq \top$, para todo $\alpha, \beta \in A$. O *índice de um conjunto coerente* $x \in \mathcal{A}$, denotado por $i(x)$, é o supremo do conjunto dos índices de seus tokens, ou seja, $i(x) = \bigsqcup_K \{j(\alpha) | \alpha \in x\}$. Em particular, $i(\emptyset) = \perp$.

Objetos que possuem um mesmo índice podem ser comparados relativamente à qualidade de informação que contém a respeito do índice considerado. Se x e y são objetos de um espaço coerente $\mathcal{A}$, para um determinado índice k , diz-se que x é uma *aproximação k -indexada* de y , e denota-se $x \triangleleft_k y$, se e somente se $i(x) = i(y) = k$ e $x \subseteq y$.

Existe agora a possibilidade de introduzir um outro tipo de totalidade de objetos. Diz-se então que um objeto é *quasi-total* se ele concentra toda informação relativa ao seu índice. Isto significa que não existe token da teia A cuja informação é no máximo igual à do índice de um objeto quasi-total x , que seja coerente com todos os tokens de x e que não seja elemento de x . Tem-se que então que um objeto x com índice $i(x) = k$ é *quasi-total* em um espaço coerente $\mathcal{A}$ se e somente se sempre que existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x \triangleleft_k y$ então $x = y$. Denota-se a família dos objetos quasi-totais de $\mathcal{A}$ por $qtot(\mathcal{A})$. Salienta-se que $\emptyset$ é um objeto quasi-total e que todo objeto total é também quasi-total. A operação de *fecho indexado* transforma um objeto parcial no objeto quasi-total que possui o mesmo índice.

2.2 Espaços Coerentes Gerados por um Conjunto Básico

Nesta seção introduz-se uma classe de espaços coerentes adequada para a abordagem construtiva adotada neste trabalho. Estes espaços coerentes caracterizam-se por serem obtidos a partir de um conjunto parcialmente ordenado, denominado de conjunto básico.

Seja $(A, \leq_A)$ uma ordem parcial e $IA = \{[a_1, a_2] \mid a_1, a_2 \in A\}$ a família de intervalos $[a_1, a_2] = \{a \in A \mid a_1 \leq a \leq a_2\}$ de elementos de A . Para todo $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \in IA$, a *relação de coerência* $\approx_{\leq_A}$ induzida por $\leq_A$ é definida como $[a_1, a_2] \approx_{\leq_A} [b_1, b_2] \Leftrightarrow a_1 \leq b_2 \wedge b_1 \leq a_2$. Diz-se que a teia $(IA, \approx_{\leq_A})$ é induzida por $\leq_A$. Observe que $\approx_{\leq_A}$ possui um significado claro e intuitivo: $X \approx_{\leq_A} X'$ se e somente se $X \cap X' \neq \emptyset$, para todo $X, X' \in IA$. Diz-se que $\mathcal{IA} \equiv (Coh(IA, \approx_{\leq_A}), \subseteq)$ é o *espaço coerente gerado por um conjunto básico* A .

Considere agora o cálculo de índices de tokens e de conjuntos coerentes em $\mathcal{IA}$. Seja $\wp(A) \equiv (\wp(A), \subseteq, \cap, A, \emptyset)$ o reticulado completo do conjunto das partes do conjunto básico A , com operação de supremo $\cap$, bottom A e topo $\emptyset$, onde $X \subseteq Y$ se e somente se $Y \subseteq X$, para todo $X, Y \in \wp(A)$. Os índices dos tokens da teia $(IA, \approx_{\leq_A})$ são determinados por uma função índice de token $j: IA \rightarrow \wp(A)$, $X \mapsto j(X) = X$, que associa cada intervalo $X \in IA$ ao seu correspondente subconjunto de A no reticulado $\wp(A)$. Segue que o índice de um conjunto coerente $x \in \mathcal{IA}$ é dado por $i(x) = \bigcap_{\wp(A)} \{X \mid X \in x\}$. Quando $i(x) = \{k\}$, escreve-se $i(x) = k$.

Exemplo 2.1. Considere como conjunto básico o conjunto dos números racionais Q e seja $\mathcal{IQ} \equiv (Coh(IQ, \approx_{IQ}), \subseteq)$ o espaço coerente gerado por Q . O conjunto coerente $x = \{[p, q] \in IQ \mid p \leq a \leq b \leq q, a, b \in Q\} \in \mathcal{IQ}$ é um objeto quasi-total de índice $i(x) = [a, b]$, enquanto que $y = \{[p', q'] \in IQ \mid p' \leq r \leq q', r \in Q\} \in \mathcal{IQ}$ é um objeto total com índice $i(y) = r$. O conjunto coerente $z = \{[p'', q''] \in IQ \mid p'' < 3 < q''\} \in \mathcal{IQ}$, cujo índice é $i(z) = 3$, não é um objeto total. Entretanto, o fecho indexado de z , dado por $\hat{z} = \{[p, q] \in IQ \mid p \leq 3 \leq q\}$, é o objeto total de $\mathcal{IQ}$ com $i(\hat{z}) = i(z) = 3$. ♦

3 Os Sistemas Ordenados de 2ª Ordem

As estruturas dos tipos de dados que podem ser representadas globalmente foram denominadas de *sistemas ordenados de 2ª ordem*.

Definição 3.1. Sistemas de 2ª Ordem. Diz-se que A é um sistema de 2ª ordem se $A = ((\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})), \Sigma_{\mathbb{A}})$,

onde $\mathbb{A} \neq \emptyset$ é o universo do sistema, $\wp(\mathbb{A})$ é o conjunto das partes de $\mathbb{A}$, $\Sigma_{\mathbb{A}} = \left(\{f_{\mathbb{A}_i}\}_{i \in I}, \{r_{\mathbb{A}_j}\}_{j \in J} \right)$

é a estrutura (de aplicação) do sistema, com funções associadas $\mu: I \rightarrow \mathbb{N}$ e $\delta: J \rightarrow \mathbb{N}$, compreendendo funções e relações definidas sobre o universo $\mathbb{A}$ e $\wp(\mathbb{A})$, e tal que, para $\lambda_{\mathbb{A}} \in \{\mathbb{A}, \wp(\mathbb{A})\}$, é válido que:

(i) $I \subseteq U$ é um subconjunto de índices, que pode ser vazio. Para cada $i \in I$, $\mu(i) \in \mathbb{N}$, tem-se que $f_{\mathbb{A}_i}: \lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)} \rightarrow \lambda_{\mathbb{A}}$ é uma função $\mu(i)$ -ária definida sobre $\lambda_{\mathbb{A}}^{\mu(i)}$. Quando $\mu(i) = 0$, $f_{\mathbb{A}_i}$ é um elemento destacado de $\lambda_{\mathbb{A}}$.

(ii) $J \subseteq V$ é um subconjunto de índices, que também pode ser vazio. Para cada $j \in J$, $\delta(j) \in \mathbb{N}$, tem-se que $r_{\mathbb{A}_j} \subseteq \lambda_{\mathbb{A}}^{\delta(j)}$ é uma relação $\delta(j)$ -ária definida em $\lambda_{\mathbb{A}}$.

Se na subestrutura de relações do sistema A for definida uma ordem parcial de posição $\leq_{\mathbb{A}}$ sobre o universo $\mathbb{A}$, então diz-se que A é um sistema ordenado de 2ª ordem. O tipo ou assinatura do sistema A é dado por $\langle \mu, \delta \rangle$. A família de todos os sistemas ordenados de 2ª ordem é denotada por $SO2$. ♦

Exemplo 3.1. O sistema ordenado de 2ª ordem dos números reais $\mathbb{R}$ é o sistema $R = ((\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})), \Sigma_{\mathbb{R}})$, com $\Sigma_{\mathbb{R}} \equiv \langle *_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}}, F_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}, M_{\mathbb{R}}, \sigma_{\mathbb{R}} \rangle$, onde $*_{\mathbb{R}}$ são operações aritméticas, $\leq_{\mathbb{R}}$ é a relação parcial de posição, $F_{\mathbb{R}}$ são funções de

reais, R_R são relações definidas sobre $\mathbb{R}$, M_R representa a estrutura de medidas definida pela métrica e pela norma em $\mathbb{R}$, e σ_R é a topologia de Hausdorff. Por outro lado, $\mathbb{IR} = (\Lambda_{\mathbb{IR}}; \Sigma_{\mathbb{IR}})$ é o sistema intervalar ordenado de 2ª ordem dos intervalos reais $\mathbb{IR}$ [28], com $\Sigma_{\mathbb{IR}} \equiv \langle *_{\mathbb{IR}}, \leq_{\mathbb{IR}}, F_{\mathbb{IR}}, R_{\mathbb{IR}}, M_{\mathbb{IR}}, \sigma_{\mathbb{IR}} \rangle$, onde $*_{\mathbb{IR}}$ são operações aritméticas intervalares, $\leq_{\mathbb{IR}}$ é a relação parcial de posição, $F_{\mathbb{IR}}$ são funções intervalares, $R_{\mathbb{IR}}$ são relações definidas sobre $\mathbb{IR}$, $M_{\mathbb{IR}}$ representa a estrutura de medidas definida por uma função distância intervalar e uma função valor absoluto intervalar, e $\sigma_{\mathbb{IR}}$ é a topologia definida sobre $\mathbb{IR}$. ♦

Os sistemas ordenados de 2ª ordem podem ser *bi-estruturados*. Neste caso, são denotados por $A \equiv ((A, \wp(A)); \Sigma_A^{in}; \Sigma_A^{ap})$. A bi-estrutura deste sistema é dada por uma *estrutura de informação* Σ_A^{in} - relacionada com a natureza interna dos objetos do universo, com o conjunto das aproximações destes objetos, com a topologia de informação, compatível com uma abordagem domínio-teórica -, e uma *estrutura de aplicação* Σ_A^{ap} - relacional, funcional, topológica -, determinada pelo uso pretendido do sistema representado.

Foram definidos os *morfismos* de sistemas ordenados de 2ª ordem e as *transformações* realizadas sobre estes sistemas, como as *transformações de universo* (p. ex. a determinação de subsistemas), as *estruturais* (p. ex. redução, expansão, regulação de estruturas) e, principalmente, as *transformações globais*, onde destacam-se as noções de *construção* e *evolução de sistemas*, que envolvem transformações de universo e de estrutura.

Definição 3.2. Construtor de Sistemas. Um construtor de sistemas de 2ª ordem é toda função $t \equiv \langle t_u; t_\Sigma \rangle: SO2 \rightarrow SO2$, definida por $tX = (t_u(X, \wp(X)); t_\Sigma \Sigma_X)$, para todo $X = ((X, \wp(X)); \Sigma_X) \in SO2$, com, de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$, tal que, para $\lambda_X \in \{X, \wp(X)\}$:

- (i) t_u é um construtor de universos tal que, onde $t_u X \subseteq \wp(X)$ e $t_u \wp(X) = \wp(t_u X)$;
- (ii) $t_\Sigma \equiv \langle t_F, t_R \rangle$ é um construtor de estruturas tal que, para todo $i \in I$ e $j \in J$,

$$\Sigma_X \mapsto t_\Sigma \Sigma_X = \left(\left\{ (t_F f)_{(t_u X)_i} \right\}_{i \in I}, \left\{ (t_R r)_{(t_u X)_j} \right\}_{j \in J} \right);$$

- (iii) t_F é um construtor de funções tal que, para todo $i \in I$ e $f_{X_i}: \lambda_X^{\mu(i)} \rightarrow \lambda_X$, tem-se que $f_{X_i} \mapsto (t_F f)_{(t_u X)_i}: \lambda_{t_u X}^{\mu(i)} \rightarrow \lambda_{t_u X}$, com $\lambda_{t_u X} \in \{t_u X, t_u \wp(X)\}$, onde a função construída $(t_F f)_{(t_u X)_i}$ é a extensão natural da função original f_{X_i} ao novo universo construído, definida por:

$$(X_1, \dots, X_{\mu(i)}) \mapsto \left\{ f_{X_i}(x_1, \dots, x_{\mu(i)}) \in \lambda_X \mid x_1 \in X_1, \dots, x_{\mu(i)} \in X_{\mu(i)} \right\},$$

para cada $x_1, \dots, x_{\mu(i)} \in \lambda_X$ e $X_1, \dots, X_{\mu(i)} \in \lambda_{t_u X}$;

- (iv) t_R é um construtor de relações, tal que, para todo $j \in J$ e $r_{X_j} \subseteq \lambda_X^{\delta(j)}$, com $\lambda_X \in \Lambda_X$, tem-se que $r_{X_j} \mapsto (t_R r)_{(t_u X)_j} \subseteq \lambda_{t_u X}^{\delta(j)}$, com $\lambda_{t_u X} \in \Lambda_{t_u X}$, onde a relação construída $(t_R r)_{(t_u X)_j}$ é tal que, para todo $x_1, \dots, x_{\delta(j)} \in \lambda_X$ e $X_1, \dots, X_{\delta(j)} \in \lambda_{t_u X}$, tem-se que $(X_1, \dots, X_{\delta(j)}) \in r_{t_u X_j}$ se e somente se, para todos

$x_1, \dots, x_{\delta(j)} \in \bigcup_{l=1}^{\delta(j)} X_l$, sempre que se verifica $(x_1, \dots, x_{\delta(j)}) \in r_{X_j}$ e não ocorre $x_k, x_{k'} \in X_l$, para todo $k, k', l = 1, \dots, \delta(j)$, então tem-se que $x_1 \in X_1, \dots, x_{\delta(j)} \in X_{\delta(j)}$;

(v) Se o sistema construído for um sistema bi-estruturado $tX = (t_u \Lambda_X; \Sigma_{t_u X}^{\text{in}}; t_\Sigma \Sigma_X)$, então $\Sigma_{t_u X}^{\text{in}}$ é a estrutura de informação associada à estrutura de domínio do universo $t_u X$ construído por t_u . ♦

A *evolução* de um sistema ordenado de 2ª ordem A em um sistema ordenado de 2ª ordem B consiste de uma *construção regulada* do sistema B. O sistema B é obtido a partir do sistema A pela ação de um construtor de sistemas t , sendo que sua estrutura é regulada por algum subsistema de B. A regulação das construções permite que se obtenham funções e relações bem comportadas [3] nas estruturas dos sistemas construídos. Existe também uma imersão de A no sistema evoluído B.

A categoria SO2 possui sistemas ordenados de 2ª ordem como objetos e homomorfismos fortes de sistemas ordenados de 2ª ordem como morfismos. As transformações de sistemas foram introduzidas como endofuntores. Mostrou-se que o functor de evolução de sistemas pode ser entendido como a composição de functor regulador com o functor de construção de sistemas [3,8].

Exemplo 3.2. Considere como sistema básico o sistema ordenado de 2ª ordem $Q = ((Q, \wp(Q)); \Sigma_Q)$ dos números racionais Q , com uma estrutura $\Sigma_Q \equiv \langle \leq_Q, *_Q \rangle$, onde $\leq_Q$ é a relação de posição usual em Q e $*_Q$ são operações aritméticas em Q . Aplicando-se o construtor intervalar $[]$ ao sistema Q , obtém-se o sistema ordenado intervalar de 2ª ordem $IQ = ((IQ, \wp(IQ)); \Sigma_{IQ})$, cujo universo é o conjunto dos intervalos de racionais $IQ = \{[p, q] \mid p, q \in Q\} \subseteq \wp(Q)$. Para obter a estrutura $\Sigma_{IQ} \equiv \langle \leq_{IQ}, *_{IQ} \rangle$, define-se primeiramente o construtor de operações aritméticas intervalares $[]_F$, de forma que, para toda operação aritmética $*_Q : Q \times Q \rightarrow Q$ definida no sistema básico Q , tem-se que $*_Q \mapsto ([]_F *_Q) = *_{IQ} : IQ \rightarrow IQ$, tal que $X_1 *_Q X_2 = \{x_1 *_Q x_2 \in Q \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. Considerando-se, neste caso, o subsistema regulador como o próprio sistema IQ , tem-se que $*_{IQ}$ é bem comportada relativamente a esse sistema. Define-se agora o construtor de relações intervalares binárias $[]_R$, tal que, para a relação de posição, obtém-se que $[p, q] < [p', q']$ se e somente se $q < p'$, e $[p, q] \leq [p', q']$ se e somente se $[p, q] < [p', q']$ ou $[p, q] = [p', q']$. Assim, segue o sistema intervalar IQ é uma evolução do sistema ordenado de 2ª ordem Q . ♦

4 A Representação Global de Sistemas Ordenados de 2ª Ordem

Para a *globalização* de sistemas ordenados de 2ª ordem foram introduzidos os *espaços coerentes bi-estruturados*, denotados por $((IIA, \wp(IIA)); \Sigma_{IIA}^{\text{in}}; \Sigma_{IIA}^{\text{ap}})$. Estes *espaços coerentes bi-estruturados* constituem sistemas ordenados de 2ª ordem bi-estruturados, obtidos a partir de *evoluções sucessivas específicas* a partir de um *sistema básico* $A_0 \equiv ((A, \wp(A)); \Sigma_A)$.

O universo IIA do espaço coerente bi-estruturado é um *espaço coerente de intervalos* de elementos do conjunto básico, com *objetos indexados*, gerado pelo *conjunto básico ordenado enumerável* A . A *relação de coerência* deste espaço coerente é *induzida* pela ordem de posição $\leq_A$ definida no conjunto básico A (veja seção 2.2).

A indexação dos objetos deste espaço coerente permite que estes objetos (conjuntos coerentes) possam ser referenciados pelo seu *índice* (veja seção 2.1). Isto permitiu a definição de dois tipos de totalidade neste espaço coerente, os objetos totais e os quasi-totais (veja seção 2.1 e exemplo 2.1). O subsistema dos objetos totais é denotado por $\text{tot}_{IIA} \equiv ((\text{tot}(IIA), \wp(\text{tot}(IIA))); \Sigma_{\text{tot}}^{\text{in}}; \Sigma_{\text{tot}}^{\text{ap}})$ e o subsistema dos objetos quasi-totais por $\text{qtot}_{IIA} \equiv ((\text{qtot}(IIA), \wp(\text{qtot}(IIA))); \Sigma_{\text{qtot}}^{\text{in}}; \Sigma_{\text{qtot}}^{\text{ap}})$.

A *estrutura de informação* Σ_{IA}^{in} deste espaço coerente é composta por funções lineares (veja seção 2), com uma estrutura topológica compatível [4,5]. A *estrutura de aplicação* Σ_{IA}^{ap} - algébrica, de ordem, relacional, funcional, de medidas, topológica, dentre outras - é obtida pelo processo construtivo a partir da estrutura do sistema básico $A_0 \equiv ((A, \wp(A)); \Sigma_A)$.

4.1 O Processo de Construção Global

Nesta seção apresentam-se as etapas do processo de *construção global*, ilustrado na figura 1, considerando-se que a estrutura (de aplicação) dos sistemas é formada apenas por uma ordem de posição $\leq$, uma família R de relações e uma família F de funções. Uma subestrutura de medidas e a caracterização topológica foram estudadas em [3,4,5,6,7].

O ponto de partida da construção é a determinação do *sistema básico* $A_0 \equiv ((A, \wp(A)); \Sigma_A)$. O universo A do sistema básico A_0 , denominado de conjunto básico, é um subconjunto enumerável e ordenado (por uma relação de posição $\leq_A$) do universo do sistema a ser representado. A estrutura básica Σ_A é definida por restrição da estrutura do sistema a ser representado ao conjunto básico.

A *primeira evolução* na construção, referida como a $[]$ -evolução, consiste da aplicação regulada do construtor intervalar, denotado por $[]$, sobre o sistema básico A_0 . Obtém-se assim um *sistema intervalar*, denotado por $A_1 \equiv ((IA, \wp(IA)); \Sigma_{IA})$, onde IA é conjunto de intervalos de elementos do conjunto básico A , e a sua estrutura Σ_{IA} é obtida pela aplicação do construtor de funções $[]_F$ e do construtor de relações $[]_R$ (associados ao construtor intervalar $[]$) à estrutura Σ_A do sistema básico A_0 . A regulação da construção é relativa ao próprio sistema evoluído (veja exemplo 3.2).

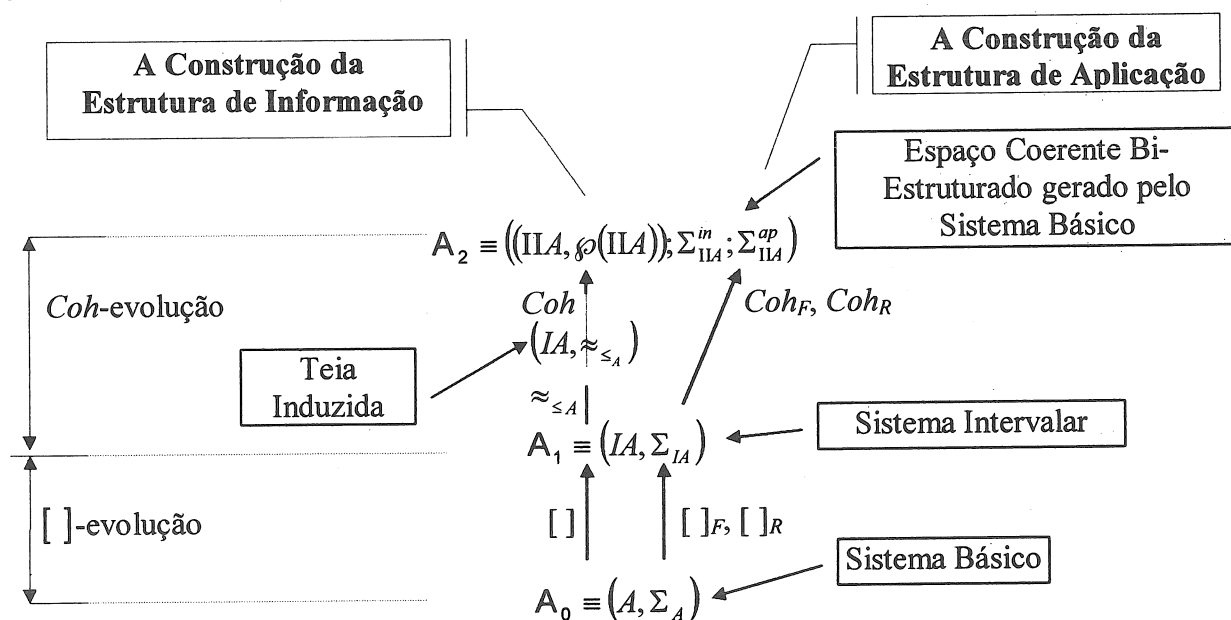


FIGURA 1- O Processo de Construção Global

A *segunda evolução* ou *evolução final*, referida como Coh -evolução, consiste da aplicação regulada do construtor de espaço coerente, denotado por Coh , sobre o sistema intervalar A_1 . Obtém-se assim o *sistema bi-estruturado* $A_2 \equiv ((IIA, \wp(IIA)); \Sigma_{IIA}^{\text{in}}; \Sigma_{IIA}^{\text{ap}})$, onde IIA é o *espaço coerente intervalar gerado pelo conjunto básico* A . A estrutura de informação Σ_{IIA}^{in} é determinada pela ordem de informação $\subseteq$ e

uma família de funções lineares definidas no espaço coerente $\mathbb{II}A$. A estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{II}A}^{ap}$ é obtida pela aplicação, regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais, do construtor de funções Coh_F e do construtor de relações Coh_R (associados ao construtor de espaço coerente Coh) à estrutura $\Sigma_{\mathbb{I}A}$ do sistema intervalar A_1 . A regulação da construção permite que as funções e relações evoluídas sejam bem comportadas relativamente ao subsistema dos objetos quasi-totais, e, conseqüentemente, ao subsistema dos objetos totais.

4.2 A Representação Global

Um espaço coerente bi-estruturado $\mathbb{II}A$, obtido pelo processo de globalização, é a *representação global* de um dado sistema ordenado de 2ª ordem A quando é possível recuperar este sistema através do subsistema dos *objetos totais* $\text{tot}_{\mathbb{II}A}$ do espaço $\mathbb{II}A$, pela determinação de *isomorfismos* relativos à estrutura de aplicação, denominados de Σ_{ap} -isomorfismos, entre o sistema representado A e o subsistema dos objetos totais $\text{tot}_{\mathbb{II}A}$. Da mesma forma, estabelecendo também Σ_{ap} -isomorfismos entre $\mathbb{I}A$ - o *subsistema (estendido) dos intervalos* de elementos de A - e o subsistema dos *objetos quasi-totais* $\text{qtot}_{\mathbb{II}A}$, garante-se que o sistema intervalar $\mathbb{I}S$ pode ser recuperado pelo subsistema dos objetos quasi-totais $\text{qtot}_{\mathbb{II}A}$ do espaço coerente $\mathbb{II}A$.

Definição 4.1. Índice Real. O índice real de um conjunto coerente $x \in \mathbb{II}A$ é definido como

$$ir(x) = \bigcap \left\{ Y \in \mathbb{I}A^* \mid i(x) \subseteq Y \wedge l(X) \leq l(Y) \leq r(Y) \leq r(X), \forall X \in x \right\},$$

onde i é o índice de um conjunto coerente (veja seção 2.1), $l(W)$ e $r(W)$ são, respectivamente, extremos esquerdo e direito do intervalo W . ♦

Definição. Representação Global. Diz-se que espaço coerente bi-estruturado $((\mathbb{II}A, \wp(\mathbb{II}A)); \Sigma_{\mathbb{II}A}^{in}; \Sigma_{\mathbb{II}A}^{ap})$, obtido pelo processo de construção global, é a representação global do sistema de 2ª ordem A se e somente se existe um Σ_{ap} -isomorfismo $\phi: \text{qtot}_{\mathbb{II}A} \cong_{ap} \mathbb{I}A$, definido por $\phi: \text{qtot}(\mathbb{II}A) \cup \wp(\text{qtot}(\mathbb{II}A)) \rightarrow \mathbb{I}A^* \cup \wp(\mathbb{I}A^*)$, tal que

$$x \mapsto \begin{cases} ir(x) & \text{se } x \in \text{qtot}(\mathbb{II}A); \\ \{ir(w) \in \mathbb{I}A^* \mid w \in x\} & \text{se } x \in \wp(\text{qtot}(\mathbb{II}A)), \end{cases}$$

onde ir é o índice real de um conjunto coerente. ♦

Estudou-se uma abordagem categórica para o processo de construção global, mostrando-se que o processo de construção global determina uma *adjunção* entre duas subcategorias da categoria $\mathbf{SO2}$ dos sistemas ordenados de 2ª ordem: a subcategoria dos sistemas representados $\mathbf{SO2}_R$, que apresentam apenas uma estrutura, e a subcategoria das representações globais e seus subsistemas $\mathbf{SO2}_G$, que são bi-estruturadas [8].

4.3 A Representação Linear Interna

É possível estabelecer uma *representação linear interna* para cada aspecto da estrutura de aplicação, na estrutura de informação, garantindo desta forma o caráter computacional da representação.

Observa-se, por exemplo, que as funções definidas na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado nem sempre satisfazem as condições de estabilidade e linearidade [1,2], que são características dos morfismos de espaços coerentes. Entretanto, para cada função f da estrutura de aplicação, é possível estabelecer um conjunto F_f de funções da estrutura de informação - denominado de representação linear interna de f - que são capazes de reproduzir o mesmo efeito da função f e que

têm as características desejadas de estabilidade e linearidade. Em outras palavras, para cada função da estrutura de aplicação, existe um morfismo da categoria LIN que a representa.

A determinação de representações lineares internas na estrutura de informação, para funções da estrutura de aplicação, baseou-se, fundamentalmente, na prova de que, nos espaços coerentes gerados por um conjunto básico, a condição de estabilidade de uma função de objetos (funções em espaços coerentes gerados por um conjunto básico) é dependente da injetividade da respectiva função básica [9], a qual é uma propriedade inerente à estrutura do sistema representado pelo espaço coerente bi-estruturado e, portanto, inerente à estrutura de aplicação desse espaço e não à sua estrutura de informação. Para exemplos de determinação de representações lineares internas, geralmente muito extensos, veja [3,9].

5 O Espaço Coerente Bi-Estruturado de Intervalos Racionais e Representação Global de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{IR}$

A metodologia desenvolvida mostrou-se particularmente interessante quando aplicada ao sistema dos números reais e ao sistema dos intervalos reais estendido, denotados, respectivamente, por $\mathbb{R} = ((\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R})), \Sigma_{\mathbb{R}})$ e $\mathbb{IR} = ((\mathbb{IR}^*, \wp(\mathbb{IR}^*)), \Sigma_{\mathbb{IR}^*})$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e $\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \cup \{\mathbb{R}\}$ é o conjunto dos intervalos reais estendido. Nesta seção, resumem-se os resultados obtidos com a utilização do processo de construção global descrito na seção 4.1 para obter uma representação global para os sistemas $\mathbb{R}$ e $\mathbb{IR}$ [3,4,8,10,11,12,13,25].

Observando-se que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ ordenado pela relação de posição $\leq_{\mathbb{Q}}$, considerou-se como *sistema básico* o subsistema $\mathbb{Q} = ((\mathbb{Q}, \wp(\mathbb{Q})), \Sigma_{\mathbb{Q}})$ dos números racionais $\mathbb{Q}$, cuja estrutura $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ é obtida por restrição de $\Sigma_{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{Q}$.

Após a *primeira evolução* do processo - uma $[\]$ -evolução - obtém-se o sistema $\mathbb{IQ} = ((\mathbb{IQ}, \wp(\mathbb{IQ})), \Sigma_{\mathbb{IQ}})$ dos intervalos racionais, introduzido no exemplo 3.2, cujo universo é conjunto $\mathbb{IQ}$ dos intervalos racionais, e a estrutura $\Sigma_{\mathbb{IQ}}$ é obtida a partir da estrutura básica $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ pela aplicação regulada do construtor de funções $[\]_F$ e do construtor de relações $[\]_R$. Foi realizado um estudo completo [10,11,12,13] das propriedades da relação de posição intervalar $\leq_{\mathbb{IQ}}$, das operações aritméticas intervalares e das funções elementares unárias intervalares, obtidas pelo processo construtivo.

Realizada a *evolução final* - uma *Coh*-evolução - obtém-se o *espaço coerente bi-estruturado dos intervalos racionais* $((\mathbb{IIQ}, \wp(\mathbb{IIQ})), \Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{in}}; \Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{ap}})$, onde $\mathbb{IIQ} \equiv (\text{Coh}(\mathbb{IQ}, \approx_{\leq_{\mathbb{Q}}}), \subseteq)$ é o espaço coerente gerado pelo conjunto básico $\mathbb{Q}$. A estrutura de aplicação $\Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{ap}}$ é obtida a partir da estrutura intervalar $\Sigma_{\mathbb{IQ}}$ pela aplicação, regulada pelo subsistema dos objetos quasi-totais, do construtor de funções Coh_F e do construtor de relações Coh_R .

Os resultados descritos na seção 4.3 foram aplicados no sentido de se obter a *representação linear interna*, na estrutura de informação, das funções de objetos definidas na estrutura de aplicação do espaço coerente bi-estruturado dos intervalos racionais [9].

O principal resultado obtido aqui é a prova de que espaço o coerente bi-estruturado $((\mathbb{IIQ}, \wp(\mathbb{IIQ})), \Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{in}}; \Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{ap}})$, obtido pelo processo de construção global, é uma *representação global* do sistema dos números reais $\mathbb{R}$ e do sistema dos intervalos reais estendido $\mathbb{IR}$, no sentido exposto na seção 4.2. Provou-se que o sistema dos intervalos reais estendido $\mathbb{IR}$ e o subsistema $\text{qtot}_{\mathbb{IIQ}}$ dos objetos quasi-totais do espaço coerente bi-estruturado $((\mathbb{IIQ}, \wp(\mathbb{IIQ})), \Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{in}}; \Sigma_{\mathbb{IIQ}}^{\text{ap}})$ são Σ_{ap} -isomorfos, isto é, são isomorfos para a estrutura de aplicação - $\mathbb{IR} \cong_{\text{ap}} \text{qtot}_{\mathbb{IIQ}}$ -. Além disso, provou-se que o subsistema $\text{tot}_{\mathbb{IIQ}}$

dos objetos totais de $((\Pi Q, \wp(\Pi Q)); \Sigma_{\Pi Q}^{in}; \Sigma_{\Pi Q}^{ap})$, relativamente à sua estrutura de aplicação, apresenta-se como um *corpo ordenado completo* que pode ser identificado com o sistema dos números reais $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R} \cong_{ap} \text{tot}_{\Pi Q}$. A figura 2 mostra os Σ^{ap} -isomorfismos da representação global de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{IR}$.

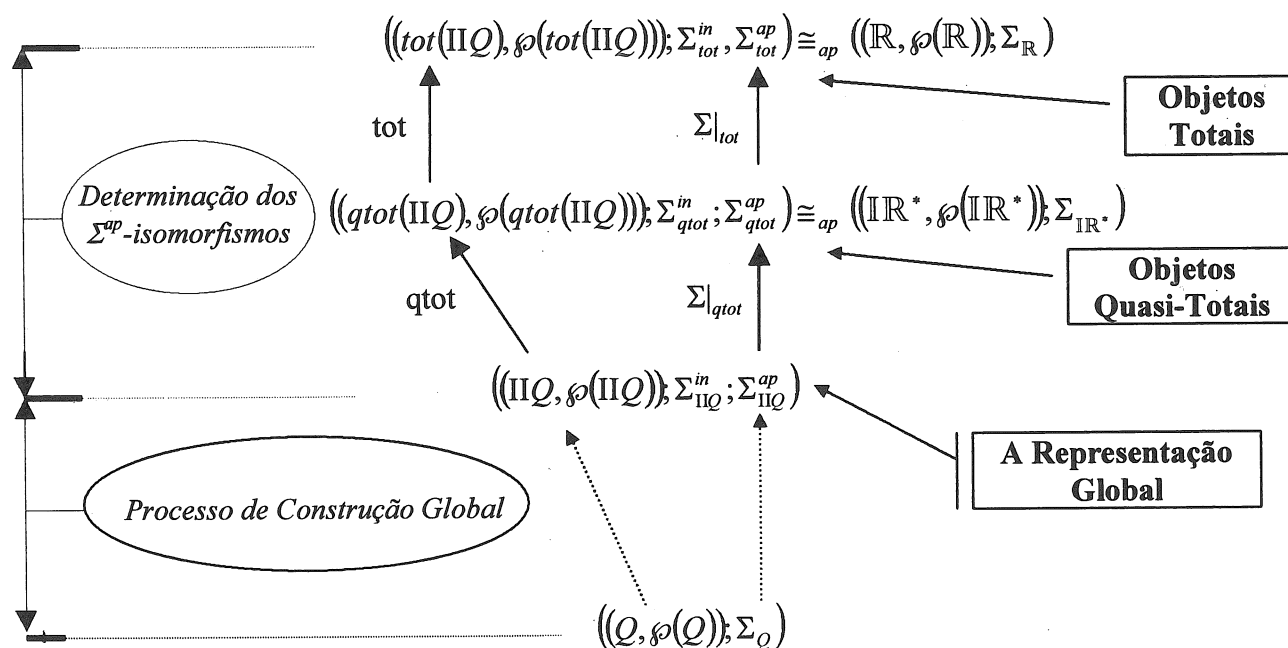


FIGURA 2 - A Representação Global de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{IR}$ e os Σ^{ap} -isomorfismos

6 Conclusões e Considerações Finais

Foi introduzida também uma caracterização topológica elegante para os espaços coerentes bi-estruturados [4,5], com funções estáveis e lineares na sua estrutura de informação, a exemplo do que existe para os domínios de Scott com funções contínuas, determinando uma estrutura topológica de informação para o sistema de representação global. Paralelamente, a estrutura de aplicação também foi caracterizada por uma estrutura topológica, e o relacionamento entre esta estrutura e a estrutura topológica de informação foi estabelecido. Para atingir este objetivo, a noção de vizinhanças estáveis [14] foi utilizada como base para introduzir o conceito de *vizinhanças lineares* na caracterização topológica da estrutura de informação, e a noção de *espaços de vizinhanças generalizadas induzidas por uma função distância mais fraca* (como em [15]), com uma *topologia associada*, foram aplicadas para obter uma caracterização topológica para a estrutura de aplicação.

Alguns trabalhos sobre a representação computacional dos números reais e a computação efetiva com números reais foram analisados [16,17,18,19,20], todos baseando-se fundamentalmente na Teoria dos Domínios. A abordagem adotada por Escardó, Edalat e Potts [19], que, baseados em um domínio contínuo $\mathbb{IR}$ de intervalos reais - os reais parciais -, desenvolveram um conceito de números reais efetivos, apresenta natureza que consideramos infinitária. O principal objetivo desta abordagem é fornecer acesso computacional direto aos números reais e intervalos de reais, objetos considerados infinitos relativamente à informação que contém, incluindo tais conceitos de forma explícita nas linguagens de programação, para que os programadores possam manipular as representações de números reais e intervalos de reais pela própria linguagem de programação. Pode-se concluir que, neste caso, os números reais não são construídos, e, embora infinitos, são considerados efetivos. Salienta-se

que a principal vantagem desta abordagem é a sua simplicidade, já que a utilização de domínios algébricos para o mesmo propósito sempre deve fazer uso de um procedimento de completção [16]. Salienta-se que a abordagem adotada no trabalho desenvolvido nesta tese difere conceitualmente da abordagem adotada por Escardó, Edalat e Potts. Optou-se aqui pelo ponto de vista tradicional da teoria da computação, adotando-se uma abordagem considerada finitária, onde somente objetos finitos (no sentido de seu conteúdo de informação) são efetivos e representáveis em linguagem de programação, enquanto que os objetos infinitos são entidades ideais limites que não são explicitamente representáveis. Assim, optando por trabalhar com um tipo de domínio algébrico - Espaços Coerentes -, foi possível efetivamente obter um modelo semântico construtivo para a Matemática Intervalar e a Computação Científica.

Outra característica levada em consideração é que nos domínios algébricos os elementos básicos são compactos, o que intuitivamente pode significar finitos. Além disso, no caso particular de Espaços Coerentes, os elementos compactos são exatamente aqueles que são finitos.

Observa-se também que os Espaços Coerentes, além de adequados para construir os números reais e intervalos de reais de modo finitário, também são adequados para modelar semanticamente os processos computacionais correspondentes como eles ocorrem na prática corrente da programação científica, mais especificamente, da matemática intervalar. Foi possível observar que a noção de computação por construção está explícita nestas estruturas, que se mostraram perfeitamente adequadas à metodologia de construção desenvolvida.

Salienta-se que a abordagem adotada também difere de outras existentes por permitir que as características externas à construção interna dos reais (objetos totais) e intervalo reais (objetos quasi-totais), tais como suas operações algébricas, sua ordem de posição, sua distância euclidiana, sua topologia de Hausdorff, dentre outras, possam ser obtidas pelo processo construtivo, de modo paralelo à obtenção dos objetos (reais e intervalos reais). Outras abordagens consideram que estas características, que não são de natureza computacional, devem ser obtidas a partir da estrutura de informação, ainda que sendo plenamente identificadas apenas no subespaço dos objetos totais. Por outro lado, em nossa construção, ao mesmo tempo em que esta construção externa procede, sua representação interna é garantida por uma estrutura de informação de Espaço Coerente com morfismos estáveis e lineares, assegurando a existência de uma representação computacional para elas.

Por outro lado, observa-se que a abordagem finitária proposta neste trabalho e a abordagem infinitária de Escardó, Edalat e Potts parecem não ser contraditórias, pois é possível recuperar as propriedades e entidades infinitas como propriedades e entidades que são construídas a partir de quasi-propriedades generalizadas e entidades parciais em espaços coerentes [21]. Resta, contudo, como um trabalho ainda a ser realizado, tornar explícita a conexão entre as duas abordagens, no que diz respeito aos aspectos de computabilidade de números, intervalos e funções, determinando, de maneira mais precisa, o modo pelo qual as representações infinitárias, modeladas pelo domínio contínuo $\mathbb{IR}$, aparecem no contexto das representações finitárias, modeladas pelo espaço coerente bi-estruturado de intervalos racionais.

Observa-se a possibilidade de que os espaços coerentes bi-estruturados possam ser aplicados em *sistemas de inteligência artificial distribuída*, para modelar a dinâmica de teorias de cláusulas, com o objetivo de expressar a análise topológica (métrica) das bases de conhecimento evolutivas introduzidas por Oliveira [22]. Acredita-se que o relacionamento entre a dinâmica da teoria de cláusulas e o processo de programação indutiva em lógica possa fornecer um tratamento denotacional dos processos de aprendizado e o intercâmbio de conhecimento em Inteligência Artificial Distribuída.

Os resultados obtidos também podem ser aplicados em *fundamentos da Inteligência Artificial*. Rocha Costa [23,24], em sua tese de doutorado, introduziu uma formalização inicial do processo de desenvolvimento de mecanismos computacionais. Observa-se que a metodologia desenvolvida pode

colaborar para a formalização das idéias indicadas em [23], relativamente à evolução ou construção autorregulada de mecanismos computacionais.

7 Referências

- [1] GIRARD, J.; LAFONT, Y.; TAYLOR, P. **Proofs and Types**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 176p.
- [2] TROELSTRA, A. S. **Lectures on Linear Logic**. Stanford: Leland Stanford J. Univ., 1992. (Lecture Notes, n.29).
- [3] DIMURO, G. P. **Uma Representação Construtiva Global para Sistemas Ordenados de Segunda Ordem em Espaços Coerentes Bi-Estruturados, com Aplicação em Matemática Intervalar**. Porto Alegre: CPGCC/UFRGS, 1998. 318 p. (Tese de Doutorado)
- [4] DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Uma Caracterização Topológica para O Espaço Coerente Intervalar Bi-Estruturado. In: CONG. NAC. DE MATEM. APLICADA E COMPUT., 20., 1997, Gramado. **Resumos**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1997. p.249-250.
- [5] DIMURO, G. P. ; COSTA, A. C. R. A Topological Characterization for the Bi-Structured Interval Coherence Space. In: WORKSHOP BRASILEIRO DE MÉTODOS FORMAIS, 1., P. Alegre, 1998. **Anais**. Porto Alegre: SBC, 1998.
- [6] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. A Measure System for the Bi-Structured Coherence Space of Rational Intervals. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTERVAL METHODS AND THEIR APPLICATION IN GLOBAL OPTIMIZATION, 4., 1998, Nanjing. **Proceedings...** Nanjing: Nanjing Univer., 1998.
- [7] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. Uma Estrutura de Medidas Intervalares Generalizada. In: CONG. NAC. DE MATEM. APLIC. E COMPUT., 21., 1998, Caxambú. **Resumos**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1998.
- [8] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. **Global Representation of Second Order Ordered Systems**. In: 2nd BRAZIL & USA WORK. ON FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 1997, N. Orleans.
- [9] REISER, R. H. S. **Estudo da Categoria Computável dos Espaços Coerentes Gerados por Conjuntos Básicos com Aplicação em Análise Real**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1997. 121p. (Dissertação de Mestrado)
- [10] DIMURO, G. P. **Uma Construção dos Reais Computáveis utilizando Espaços Coerentes de Intervalos**. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1996. 150 p. (E.Q. - 05).
- [11] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; CLAUDIO, D. M.. A Coherence Space of Rational Intervals. In: WORKSHOP ON COMPUTER ARITHMETIC, INTERVAL AND SYMBOLIC COMPUTATION, 2., 1996, Recife. **Anais...** Recife: UFPE-DI, 1996. p.26-28.
- [12] DIMURO, G.P. ; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. Uma Construção dos Números Reais Computáveis Utilizando Espaços Coerentes de Intervalos Racionais. In: CONG. NAC. DE MATEM. APLIC. E COMPUT., 19., 1996, Goiânia. **Anais**. Rio de Janeiro: SBMAC, 1996.
- [13] DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R. ; CLAUDIO, D. M. **A Coherence Space of Rational Intervals for a Construction of IR**. Reliable Computing, St. Petersburg, 1999. (ainda não publicado)
- [14] ZHANG, G. **Logic of Domains**. Boston: Birkhäuser, 1991. 259 p.
- [15] SMYTH, M. B. Semi-metrics, Closure Spaces and Digital Topology. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v.151, n.1, p.257-276, Nov. 1995.
- [16] ACIÓLY, B. M. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar**. Porto Alegre: CPGCC/UFRGS, 1991.
- [17] GIANANTONIO, P. **A functional Approach to Real Number Computation**. Pisa: University of Pisa, 1993.
- [18] ESCARDÓ, M. H. PCF Extended With Real Numbers. **Theoretical Comp. Science**, Amsterdam, v. 162, n.1, 1996.
- [19] EDALAT, A. **Domains for Computation in Mathematics, Physics and Exact Real Arithmetic**. London: Dep. of Comp./Imperial College, 1997. In: Workshop on Computation and Approximation, 3., 1997, Birmingham.
- [20] POTTS, P. J.; EDALAT, A. **Exact Real Computer Arithmetic**. London: Dep. of Comp./Imperial College, 1997.
- [21] REISER, R. H. S. et al. **The Recursive Functions on Bi-Structured Coherence Spaces**. Trabalho apresentado em 2nd BRAZIL & USA WORKSHOP ON FORMAL FOUNDATIONS OF SOFTWARE SYSTEMS, 1997, N. Orleans.
- [22] OLIVEIRA, F. M. Measuring Agreement and Harmony in Multi-Agent Societies: a first approach. In: WAINER, J.; CARVALHO, A. (Eds.). **Advances in Artificial Intelligence**. New York: Springer-Verlag, 1995. 342p. p.232-241.
- [23] COSTA, A. C. R. **Inteligência de Máquina: Esboço de uma Abordagem Construtivista**. Porto Alegre: CPGCC/UFRGS, 199. 168p. (Tese de Doutorado)
- [24] COSTA, A. C. R. **Preliminary Thoughts on Agents and their Development**. Porto Alegre: CPGCC/UFRGS, 1993.
- [25] DIMURO, G. P. et al. **Representing Data Types for Scientific Computation using Bi-Structured Coherence Spaces**. In: WORKSHOP ON COMPUTATION AND APPROXIMATION, 3., 1997, Birmingham.
- [26] BRIDGE, J. **Beginnining Model Theory**. Oxford: Oxford University Press, 1977. 143p.
- [27] MANZANO, M. A. **Teoría de Modelos**. Madrid: Alianza Editorial, 1989. 289p.
- [28] MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.